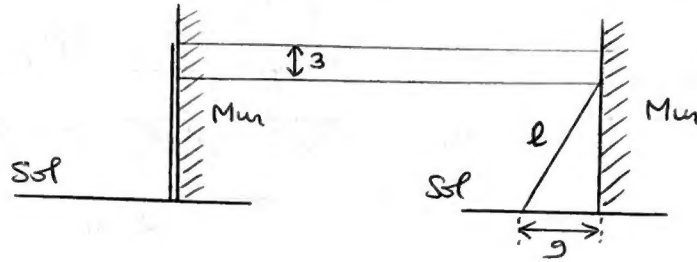


① Pb du roseau :

"Un roseau est placé verticalement contre un mur. S'il descend de 3 coudées, il s'écarte de 9 coudées. Qu'est le roseau ? Qu'est le mur ?"

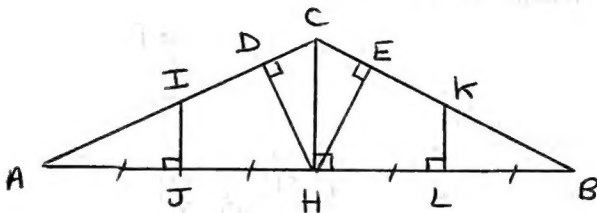
(relevé du des tablettes d'argile mésopotamiennes, vers 2000 ans av JC.

Le th de Pythagore était connu bien avant Pythagore qui vécut au 4^e siècle av JC mais n'avait pas été démontré) (ref. Hocquenghem 80)



$$l^2 = (l-3)^2 + 9^2 \dots$$

② Charpenterie (CAP)



Le dessin ci-contre représente une ferme.

AB = 12m (entraît)

AC = 6,5m (arbalétrier)

Calculer le pignon CH

la contrefiche HD

le lien IJ

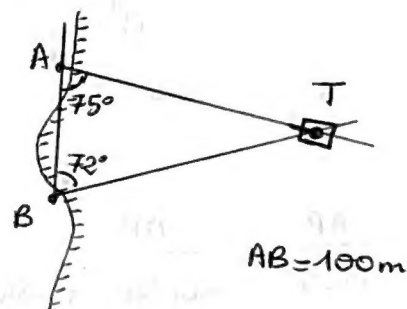
Sol. : $CH = 2,5m$; $HD \cdot AC = CH \cdot AH \Rightarrow HD = \frac{30}{13}$; $IJ = \frac{CH}{2} = 1,25m$.

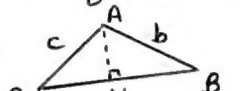
③ Distance du char à la tranchée (3ème)

Trouver AT dans le dessin :

Sol. : $\frac{100}{\sin(180 - \hat{A} - \hat{B})} = \frac{AT}{\sin \hat{B}}$

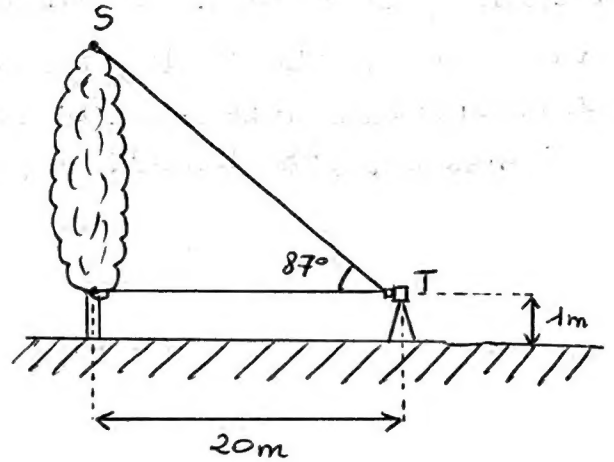
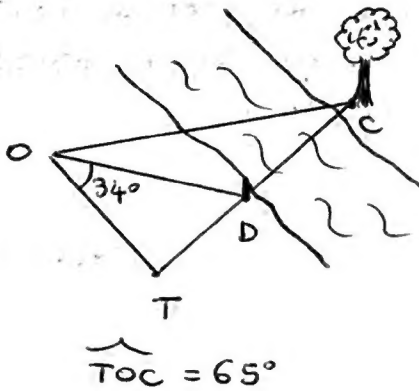
on trouve $AT \approx 174,6m$



Contexte : cet exercice ne peut être qu'une application, en 3ème, de l'exercice suivant établissant la formule $\frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c} = \frac{\sin \hat{A}}{a}$: "Calculer $\sin \hat{B}$ et $\sin \hat{C}$ dans la figure  et en déduire $\frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c}$ ".

- ④ Quelle est la hauteur de l'arbre ? (l'angle étant mesuré avec un goniomètre ou un théodolite)

Quelle est la largeur du fleuve ?

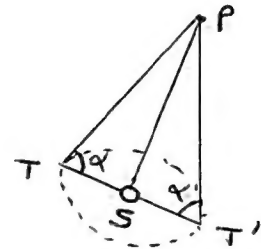


- ⑤ Quelle est la distance de l'étoile proxima du Centaure au Soleil ? (réf. quid)

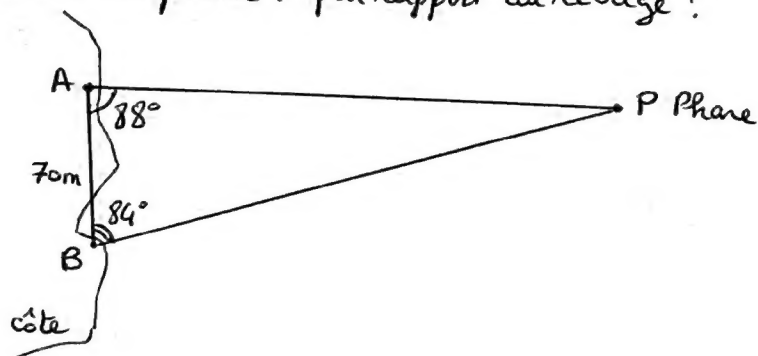
$$\alpha \approx 89,999789^\circ$$

$$TS = 1 \text{ ua} \approx 158 \cdot 10^{-7} \text{ AL}$$

Sol. $SP \approx 4,3 \text{ AL}$



- ⑥ Quelle est la position du phare P par rapport au rivage ?



Sol. $\frac{AP}{\sin 84^\circ} = \frac{AB}{\sin (180 - 88 - 84)} \Rightarrow AP = \frac{AB \cdot \sin 84^\circ}{\sin 8^\circ} \approx 500,18 \text{ m}$

② Faire le point sur un grand cours (situation : cours + rivière)

Don : raper fixe et très visible situé sur la rive et au-dessus du point de rapage.

On mesure l'angle entre une l'axe de vision constante vers le raper. A la date t_1 , on s'aligne au plan et l'on mesure l'angle entre la direction du plan et du raper et la route du raper. A la date t_2 , cet angle est mesuré à nouveau.

Pour en déduire alors la position exacte du raper ?

Appl. num. : $v = 4 \text{ m/s}$ ($4 \text{ m/s} = 9,253 \text{ km/h}$)
 $\alpha = 45^\circ$ $L = 236 \text{ m}$
 $\beta = 35^\circ$ $L + L = 236 \text{ m}$



$$\frac{PA}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{PB}{\sin \alpha} = \frac{AB}{\sin(\beta - \alpha)}$$

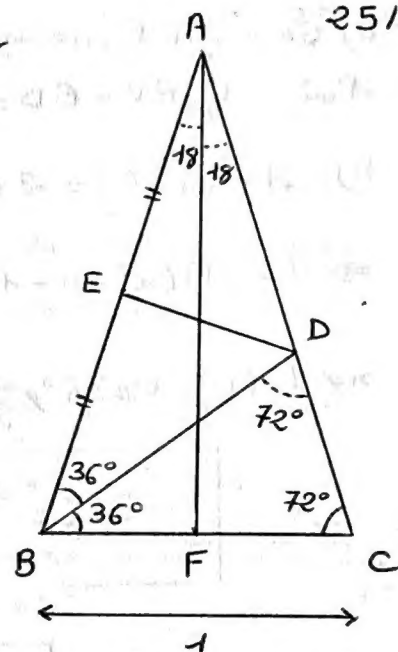
$$\left\{ \begin{array}{l} PA = \frac{L \sin \alpha}{\sin(\beta - \alpha)} \\ PB = \frac{L \sin \beta}{\sin(\beta - \alpha)} \end{array} \right.$$

On peut donc de trouver une autre route que P_1 , P_2 ou P_3 et à la direction de la route du raper.

Calcul des lignes trigonométriques de n° , $n \in \mathbb{N}$

La connaissance de $\sin 1^\circ$ suffit à déduire, de proche en proche $\cos 1^\circ$, $\tan 1^\circ$, $\sin 2^\circ$, etc...

Tracer un triangle ABC isocèle en A, tel que $\hat{B} = 72^\circ$ et $BC = 1$. La bissectrice de \hat{B} coupe $[AC]$ en D. E et F sont les milieux resp. de $[AB]$ et $[BC]$, et on note $AB = AC = x$.



- Exprimer $\cos 36^\circ$ et $\sin 18^\circ$ en fct de x en utilisant des triangles rectangles de cette figure.
- Former une équation vérifiée par x à l'aide de la formule

$$1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

En déduire x , puis $\cos 36^\circ$ et $\sin 18^\circ$.

- Trouver $\sin 36^\circ$, puis $\cos 6^\circ$, et en déduire:

$$\sin 3^\circ = \frac{1}{4} \sqrt{8 - \sqrt{3} - \sqrt{15} - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$$

Donner une approximation de $\sin 3^\circ$ à la calculatrice

- Trouver $\sin 3\theta$ en fct de $\sin \theta$ et $\sin^3 \theta$.

En déduire que $\sin 1^\circ$ est solution de l'équation $\frac{4x^3 + \alpha}{3} = x$ (*)

$$\text{où } \alpha = \sin 3^\circ$$

- Résolution de (*) par Al Kashi (math. et astronome de l'observation de Samarkande, XV^e siècle)

Posons $f(x) = \frac{4x^3 + \alpha}{3}$ où $\alpha \approx 0,052\,335\,956$

Al Kashi considère la suite $x_0 = 0$, $x_1 = f(x_0)$, ..., $x_n = f(x_{n-1})$, ...

et admet qu'elle convergeait vers la solution $\sin 1^\circ$ de (*).

(La convergence de ce type de suite attendit la fin du XVIII^e siècle pour être démontrée!). Calculer x_3 , puis à partir de $\sin 1^\circ \approx x_3$, calculer $\cos 1^\circ$, $\tan 1^\circ$, $\sin 2^\circ$, $\cos 2^\circ$, $\tan 2^\circ$, $\sin 3^\circ$.

a) On vérifie les mesures des angles données sur la figure, et les angles droits...
d'où $1 = BC = BD = DA$ et $\cos 36^\circ = \frac{x}{2}$; $\sin 18^\circ = \frac{1}{2x}$

$$b) 1 - \cos 36^\circ = 2 \sin^2 18^\circ \Rightarrow 1 - \frac{x}{2} = 2 \cdot \frac{1}{4x^2} \Rightarrow x^3 - 2x^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x^2 - x - 1) = 0, \text{ d'où } x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

$x \neq 1$ (car $\cos 36^\circ \neq \frac{1}{2}$), et $x > 0$, donc $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, et :

$$\boxed{\cos 36^\circ = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \quad \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}}$$

$$c) \sin 36^\circ = \sqrt{1 - \cos^2 36^\circ} = \dots = \frac{1}{4} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

$$\begin{aligned} \cos 6^\circ &= \cos(36 - 30) = \cos 36 \cdot \cos 30 + \sin 36 \cdot \sin 30 \\ &= \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{8} (\sqrt{3} + \sqrt{15} + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}) \end{aligned}$$

$$\sin 3^\circ = \frac{1 - \cos 6^\circ}{2} = \frac{1}{4} \sqrt{8 - \sqrt{3} - \sqrt{15} - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$$

$$d) \sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$$

$$x = 3x - 4x^3$$

$$\boxed{\frac{4x^3 + x}{3} = x} \quad (*)$$

e) On trouve

$$\sin 1 \approx 0,0174524$$

$$\cos 1 \approx 0,9998471$$

$$\tan 1 \approx 0,0174551$$

$$\sin 2 = 2 \sin 1 \cos 1 \approx 0,0348995$$

$$\cos 2 = \sqrt{1 - \sin^2 2} = 1 - 2 \sin^2 1 \approx 0,9993908$$

$$\tan 2 \approx 0,0349028$$

$\sin 3 = \sin 2 \cos 1 + \sin 1 \cos 2 \approx 0,0523359$ qui est une approximation à 10^{-7} près de la valeur prise pour x .

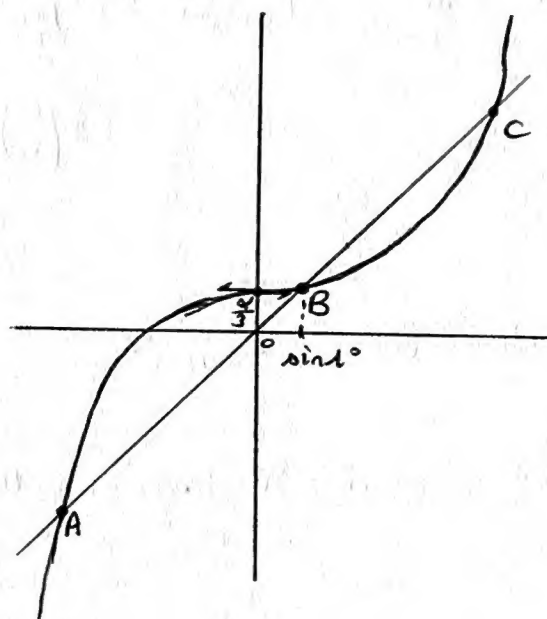
Contexte : Première S

NB : On vient de prouver que $\sin n^\circ$, $\cos n^\circ$ et $\tan n^\circ$ sont des nombres algébriques pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui est surprenant !

Prolongement : Étudier la fonction $f(x) = \frac{4x^3 + \alpha}{3}$ et prouver la convergence de (x_n) vers $\sin 1^\circ$ admise par Al Kashi (programme de TC, en donnant des indications sur la marche à suivre...). On obtient :

* $f'(x) = 4x^2 > 0$ donc f est str. \uparrow .

Il y a 3 pts d'intersection de la courbe rep. de f et la drt $y=x$. Seul B est d'abscisse $\sin 1^\circ$ (proche de 0)



* $g(x) = f(x) - x = \frac{4x^3 - \alpha}{3} - x$

$g(0) = \frac{\alpha}{3} > 0$

$g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\alpha}{3} + \frac{4}{81} - \frac{1}{3} < 0$

Ainsi $\sin 1^\circ \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$ apparaît comme l'unique pt fixe de f dans $\left[0, \frac{1}{3}\right]$. Comme :

$$f\left(\left[0, \frac{1}{3}\right]\right) \subset \left\{f(0), f\left(\frac{1}{3}\right)\right\} = \left[\frac{\alpha}{3}, \underbrace{\frac{4}{81} + \frac{\alpha}{3}}_{< 0,07}\right] \subset \left[0, \frac{1}{3}\right]$$

on pourra appliquer le Th du pt fixe si f est contractante sur $\left[0, \frac{1}{3}\right]$.

Gn a :

$$\forall \theta \in [0, \frac{1}{3}] \quad |\beta'(\theta)| = 4\theta^2 \leq \frac{4}{9} < 1$$

donc (Inégalité des A-F) :

$$\forall x, y \in [0, \frac{1}{3}] \quad |\beta(x) - \beta(y)| \leq \frac{4}{9} |x - y|$$

* Une façon commode de conclure est alors de se rattacher à la solution \sin^* de $f(x) = x$:

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^* \quad |x_n - \sin 1^\circ| &= |\beta(x_{n-1}) - \beta(\sin 1^\circ)| \leq \frac{4}{9} |x_{n-1} - \sin 1^\circ| \\ &\leq \left(\frac{4}{9}\right)^2 |x_{n-2} - \sin 1^\circ| \leq \dots \leq \underbrace{\left(\frac{4}{9}\right)^n |x_0 - \sin 1^\circ|}_{\rightarrow 0} \\ &\quad (n \rightarrow +\infty) \end{aligned}$$

donc $\lim x_n = \sin 1^\circ$

Prolongement : Visualiser cette convergence sur un dessin :

